Μάθημα 2ο 6/3/2017

Τοπολογία

E σύνολο , $\rho: E \times E \to \mathbb{R}$

$\rho(x,y)=0 \iff x=y$

$\rho(x,y)=\rho(y,x)$

$\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$

Ιδιότητες για να είναι ένας χώρος μετρικός

με $x,y,z \in E$, τότε η ρ είναι μετρική και ο (E,ρ) λέγεται μετρικός χώρος

* $\rho(x,y)$ απόσταση των x,y

* (E,ρ) μετρικός χώρος A,B μη κενά υποσύνολα του E

$$\rho(A,B) = \inf \{ \rho(x,y) \quad x \in A, y \in B \} = \inf_{(x,y) \in A \times B} \rho(x,y)$$

- $\rho(A,B) = \rho(B,A)$
- $\rho(A,B) \geq 0$
- $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \rho(A,B)=0$ το αντίστροφο δεν ισχύει

Απόσταση σημείου από σύνολο

Έστω A σύνολο και a σημείο. Ορίζω την απόσταση σημείου από σύνολο ως εξής $\rho(a,A)=\rho(\{a\},A)$

$$=\inf_{x\in A}\rho(\underbrace{a}_{\text{σταθερό}},\underbrace{x}_{\text{μεταβάλλεται}})$$

Αν $a\in A \Rightarrow \rho(a,A)=0$ το αντίστροφο δεν ισχύει

Διάμετρος συνόλου A

Ορίζεται ως εξής:

$$\delta(A)=\sup\{\rho(x,y): x\in A, y\in A\}=\sup_{(x,y)\in A^2}\rho(x,y)$$

Άσκηση 1

Αρκεί να μην είναι φραγμένη

α) Να δειχθεί ότι $\delta(\mathbb{R})=+\infty$ στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R},|\cdot|)$

β) Να δειχθεί ότι $\delta(\mathbb{R})=1$ στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R},\rho)$ (ρ διακριτή μετρική)

Λύση

β) Διακριτή μετρική

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

Τότε $\delta(\mathbb{R})=\sup\{(x,y):(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\sup\{0,1\}=1$

α) Αρκεί $(\forall M>0)(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): \rho(x,y)>M \ (\Leftrightarrow |x-y|>M)$

Σπίτι

Σελ 21, πχ 1.3.6, βιβλίο Τσαμάτος

Ορίζεται μια μετρική σχέση η εξής:

$$\tau(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \le 1$$

Παράδειγμα

Έστω ο μ.χ $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ και έχω το σύνολο $A=\{\frac{1}{\nu}, \nu\in\mathbb{N}\}$ και $0 \notin A$. Θέλω να δείξω ότι $\rho(0,A)=0$?

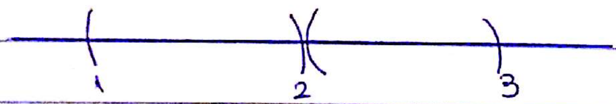
απάντηση

Ισχύει ότι $\rho(0,A)=\inf\{\rho(0,x) : x\in A\} = \inf\{|0-x| : x\in A\} =$
$= \{|0-\frac{1}{\nu}| : \nu\in\mathbb{N}\} = \inf\{\frac{1}{\nu} : \nu\in\mathbb{N}\} = 0$

Άρα $\rho(0,A)=0$

ΑΣΚΗΣΗ 2: (σπίτι)

Παίρνω την απόσταση στον μ.χ $(\mathbb{R},|\cdot|)$. Να βρεθεί η απόσταση $\rho((1,2),(2,3))=0$



ΑΣΚΗΣΗ

Αν A, B είναι φραγμένα υποσύνολα του μ.χ (E, ρ) να δείξετε ότι
$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + \rho(A,B)$ (δηλ. και το $A \cup B$ είναι φραγμένο σύνολο)

Απόδειξη

$x \in A \cup B$ και $y \in A \cup B$

Διακρίνω περιπτώσεις

$1^η$: ~~$x \in A$~~ $\wedge$ $y \in A$

$2^η$: $x \in B$ $\wedge$ $y \in B$

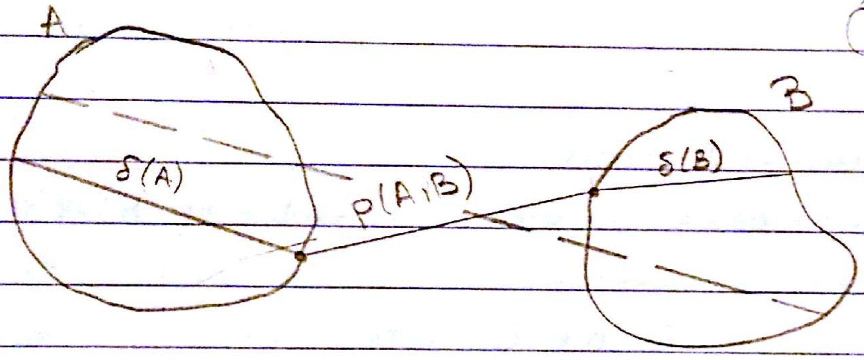
$3^η$: $x \in A$ $\wedge$ $y \in B$

$4^η$: $y \in A$ $\wedge$ $x \in B$

για την $1^η$ περίπτωση

$\rho(x,y) \leq \delta(A) \leq \delta(A) + \delta(B) + \rho(A,B)$

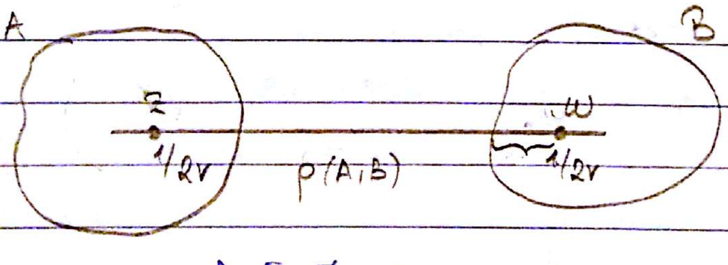
$\oplus$ $a_\nu \leq b_\nu \Rightarrow \lim a_\nu \leq \lim b_\nu$



Ισχυρίζομαι ότι (απόδειξη πιο κάτω)

$(\forall \nu \in \mathbb{N})(\exists z \in A)(\exists w \in B)$ $\rho(z,w) \leq \rho(A,B) + \frac{1}{\nu}$ ①

το παίρνω ως δεδομένο και η απόδειξη μετά



→ Απόδειξη στο τέλος

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,w) + \rho(w,y) \leq \delta(A) + \overbrace{\rho(A,B) + \frac{1}{\nu}}^{①} + \delta(B)$$

$\Rightarrow \rho(x,y) \leq \delta(A) + \rho(A,B) + \delta(B)$

$\Rightarrow \rho(x,y) = \sup_{(x,y) \in (A \cup B)^2} \rho(x,y) \leq \delta(A) + \rho(A,B) + \delta(B)$

Απόδειξη

$(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall z \in A)(\forall w \in B): \rho(z,w) > \rho(A,B) + \frac{1}{\nu_0}$

$\inf_{(z,w)\in A\times B} \rho(z,w) \geq \rho(A,B) + \frac{1}{\nu_0} \left(= \rho(A,B)\right) \Rightarrow \frac{1}{\nu_0} \leq 0$ Ατοπό

→ Ενωση δυο φραγμενων συνολων ειναι φραγμενο συνολο

Προταση

(E,ρ) μ.χ και $a \in E$, $r>0$ τοτε

$$B(a,r) = \{x \in E : \rho(x,a) < r\}$$

$\circledast$ $|x-a| < r \Leftrightarrow -r < x-a < r \Leftrightarrow -r+a < x < r+a \Leftrightarrow x \in (a-r, a+r)$

Προταση

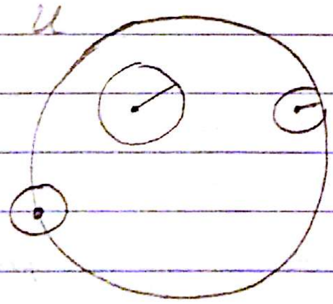
(E,ρ) μ.χ, $a \in E$ και $r>0$ τοτε

$B(a,r) = \{x \in E : \rho(x,a) < r\}$, $C(a,r) = \{x \in E : \rho(x,a) \leq r\}$

Ορισμος: Εστω $a \in E$, $U \subseteq E$, $a \in U$ τοτε λεμε

U περιοχη του $a \Leftrightarrow (\exists r>0)\ B(a,r) \subseteq U$

συμβολισμος αλλιως: $U = U(a)$



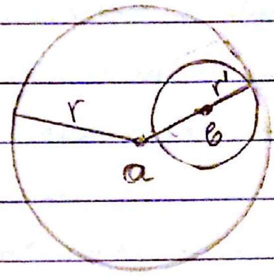
Δεν ειναι περιοχη
κατ' αναγκη ιδιου σημειου

Πρόταση

Τυχούσα σφαιρική περιοχή είναι περιοχή κάθε σημείου της

Απόδειξη:

Έστω $B(a,r)$ τυχούσα περιοχή κέντρου a και ακτίνας $r>0$ και έστω επιπλέον $b \in B(a,r)$



(b τυχόν) Θεωρούμε $r' = r - \rho(a,b)$ και $B(b,r')$. Αρκεί νδο $B(b,r') \subseteq B(a,r)$

Έστω x τυχόν με $x \in B(b,r')$ δηλ $\rho(x,b) < r'$

$\rho(x,a) < \rho(x,b) + \rho(a,b) < r' + \rho(a,b) = r - \rho(a,b) + \rho(a,b) = r \Rightarrow$

$\rho(x,a) < r \Leftrightarrow x \in B(a,r)$

Πρόταση

α) κάθε σημείο ανήκει σε κάθε περιοχή του

β) Αν U είναι περιοχή του σημείου a τότε και κάθε $V \supseteq U$ είναι περιοχή του a

γ) Η τομή δύο περιοχών του σημείου a είναι περιοχή του a (...)

δ) Για κάθε περιοχή U ενός σημείου a υπάρχει περιοχή V του a τέτοια ώστε η U να είναι περιοχή κάθε σημείου της V

Νικολιδάκης! ↓

Πρόταση

Δίνονται οι μ.χ (E_i, ρ_i), $i=1,2,\dots,n$ και σύνολο $S_i \subseteq E_i$ και $S_i \neq \emptyset$ και $S = S_1 \times \dots \times S_n \subseteq E = E_1 \times \dots \times E_n$, S_i φραγμένο $\delta(S_i) < +\infty$, τότε

1) $\delta(S_i) \leq \delta(S)$, $\forall i$

2) $\delta(S) \leq \delta(S_1) + \dots + \delta(S_n)$

3) $(S_i)_{i=1}^{n}$ φραγμένο $\forall i \Leftrightarrow S$ φραγμένο

Απόδειξη

1) $\delta(S_1) = \sup\{\rho_1(x,y) : x,y \in S_1\}$

Αρκεί νδο $\rho_1(x,y) \le \delta(S)$ $\forall x,y \in S_1$ δηλ. $\delta(S_1) \le \delta(S)$

Σταθεροποιούμε τα $x,y \in S_1$ (τα θεωρώ)

$S \ni \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$S \ni \bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ όπου $y_i \in S_i$ $\forall i=1,2,\ldots,n$

θα υπολογίσουμε την καρτεσιανή απόσταση

$$\rho(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\dots+\rho_n^2(x_n,y_n)} \geq \rho_1(x,y)$$

και $\rho(\bar{x},\bar{y}) \le \delta(S)$

συνεπώς δείξαμε αυτό που θέλαμε $\delta(S_1) \le \delta(S)$

2) $\delta(S) \le \delta(S_1)+\dots+\delta(S_n) = M \Rightarrow \delta(S) = \sup\{\rho(\bar{x},\bar{y}) : \bar{x},\bar{y} \in S\}$

δηλ. αρκεί νδο $\rho(\bar{x},\bar{y}) \le M$

$\bar{x},\bar{y} \in S \Rightarrow \bar{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, $\bar{y} = (y_1,\ldots,y_n)$

$$\rho(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\dots+\rho_n^2(x_n,y_n)} \le \rho_1(x_1,y_1)+\dots+\rho_n(x_n,y_n) \le$$

$$\le \delta(S_1)+\dots+\delta(S_n) = M \Rightarrow 2$$

άρα αποδείξαμε και το (2)

για το (3) είναι εύκολο αν σκεφτούμε ότι συνεπάγεται από (1) και (2) (Σκέψου λίγο ντε....)

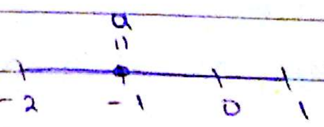
(*) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $a \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{Z}, |\cdot|)$, $a \in \mathbb{Z}$

$B(a,r) = (a-r, a+r)$

$B(-1,2) = \{-2,-1,0\}$

$\{x \in \mathbb{Z} : \rho(x,1) < 2\}$



$B(-1,1) = \{-1\}$, $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$

⊛ E τυχαίο $\neq \emptyset$, ρ_δ διακριτή στο E

$B(a,r)$, $a \in E$

π.χ. $r = 1/2$ τότε $B(a, 1/2) = \{a\}$

$B_{\rho\delta}(a,1) = \{x \in E : \rho_\delta(x,a) < 1\} = \{a\}$

$B(a,r) = \rho_\delta$, $r > 1$

ΑΣΚΗΣΗ

$C_{\rho\delta}(a,r) = \{x \in E : \rho_\delta(x,a) \leq r$

Λύση

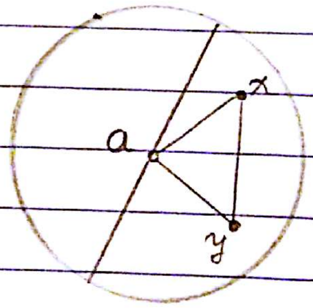
Δίνεται ο μ.χ (E,ρ), $a \in E$, $r > 0$

$\delta(B(a,r)) \leq 2r < +\infty$ θέλω να το δείξω

Αρκεί νδο $\forall x,y \in B(a,r)$ $\rho(x,y) < 2r$

Θυμάμαι τριγ. ανισότητα

$\rho(x,y) \leq \rho(x,a) + \rho(a,y) = \rho(x,a) + \rho(y,a) = r + r = 2r$, $\forall x,y \in B(a,r)$



$\delta(B(a,r)) < 2r$

(E, ρ_δ)

$B(a,1) = \{a\}$

$\delta(B(a,1)) = 0 < 2 \cdot 1 = 2$

Άσκηση

E σύνολο $\neq \emptyset$, $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$ τ.ω

a) $\rho(x,y) = 0 \iff x = y \quad \forall\, x, y \in E$

b) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z) \quad \forall\, x, y, z \in E$

Ν.δ.ο (E,ρ) μ.χ

Λύση

Αν δείξω ότι $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall\, x, y \in E$ τότε συνεπάγεται το συμπέρασμα

για $z = x$ η b) θα γίνει

$\rho(x,y) \leq \rho(y,x) \quad \forall\, x, y \in E$ ①

αν εναλλάξω τους ρόλους $x \leftrightarrow y$ τότε στην ①

θα έχω $\rho(y,x) \leq \rho(x,y) \quad \forall\, x, y \in E$ ②

Από ① και ② έχουμε $\rho(x,y) = \rho(y,x)$